(14) Die Lösungen der Schwingungsgleichungen

1. **Freie Schwingung** $\boxed{m\ddot{x}+k^2x=0}$ $(m>0)$ $\rightsquigarrow$ $\ddot{x}+\omega^2x=0$ $\quad \omega^2=\frac{k^2}{m}$ homogene Dgl.

Charakt. Gleichung: $P(\lambda)=\lambda^2+\omega^2=0$

$\lambda_{1,2}=\pm i\omega$ $\rightsquigarrow$ komplexe Lösung $\tilde{x}(t)=e^{i\omega t}$

Fundamentales Lösungssystem: $\varphi_1(t)=\cos\omega t$, $\varphi_2(t)=\sin\omega t$

Allgemeine Lösung: $x_{hom}(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ $\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}^1$

Umformung: $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ $\rightsquigarrow$ $x_{hom}(t)=A\left(\underbrace{\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}}_{\tilde{c}_1}\cos\omega t+\underbrace{\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}}_{\tilde{c}_2}\sin\omega t\right)$

Die Koeff. $\tilde{c}_i$ genügen der Bedingung $\tilde{c}_1^2+\tilde{c}_2^2=1$, weswegen wir sie als sin und cos eines Winkels α auffassen können:

$\tilde{c}_1=\sin\alpha$, $\quad \tilde{c}_2=\cos\alpha$

$$x_{hom}(t)=A\,[\underbrace{\sin\alpha\cos\omega t+\cos\alpha\sin\omega t}_{\sin(\omega t+\alpha)}]=A\cdot\sin(\omega t+\alpha)$$

In dieser Darstellung der allgemeinen Lösung heißen: A - Amplitude, ω - Eigenfrequenz und α - Anfangsphase.

2. **Erzwungene Schwingung** $m\ddot{x}+k^2x=\underbrace{Q\cdot m\cdot\sin\omega_0 t}_{\text{äußere Kraft (erregende)}}$ $\rightsquigarrow$ $\ddot{x}+\omega^2x=Q\sin\omega_0 t$ $\quad \omega^2=\frac{k^2}{m}$ inhomog. Dgl.

ω - Eigenfrequenz
ω_0 - Erregerfrequenz

Allgemeine Lösung der Dgl. $x(t)=x_{hom}(t)+\psi(t)$, mit $x_{hom}(t)=A\cdot\sin(\omega t+\alpha)$.

$\psi(x)=?$ Ermittlung nach Ansatzmethode, Form hängt ab davon, ob $i\omega_0$ Wurzel der charakteristischen Gleichung ist oder nicht.

20. V.

$P(\lambda)=\lambda^2+\omega^2=0$ $\quad \pm i\omega$ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, also

$\omega_0\neq\omega$ $\qquad\qquad$ $\omega_0=\omega$ Resonanzfall

$\psi(t)=C\cos\omega_0t+D\sin\omega_0t$ $\qquad$ $\psi(t)=t\,(C\cos\omega t+D\sin\omega t)$

Nach Einsetzen in die Dgl. bestimmt man durch Koeffizientenvergleich C und D

$$\psi''+\omega^2\psi=(\omega^2-\omega_0^2)C\cos\omega_0t+(\omega^2-\omega_0^2)D\sin\omega_0t=Q\cdot\sin\omega_0t$$

$\xrightarrow[\omega^2-\omega_0^2\neq0]{}$ $\underline{C=0}$, $\quad \underline{D=\frac{Q}{\omega^2-\omega_0^2}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{\psi(t)=\frac{Q}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\omega_0t}}$.

Division erlaubt

$\omega = \omega_0$

$$\psi'(t) = (C + \omega D t)\cos\omega t + (D - \omega C t)\sin\omega t$$
$$\psi''(t) = (2\omega D - \omega^2 C t)\cos\omega t - (2\omega C + \omega^2 D t)\sin\omega t$$
$$\psi'' + \omega^2\psi = (2\omega D - \omega^2 C t)\cos\omega t - (2\omega C + \omega^2 D t)\sin\omega t + \omega^2 t\,(C\cos\omega t + D\sin\omega t) =$$
$$= 2\omega D\cos\omega t - 2\omega C\sin\omega t = Q\sin\omega t$$

$$\rightsquigarrow \quad C = -\frac{Q}{2\omega}, \quad D = 0. \quad \psi(t) = -\frac{Q}{2\omega}\,t\cos\omega t.$$

Allgemeine Lösung der inhomog. Dgl.

$\boxed{\omega \neq \omega_0}$

$$x(t) = \underbrace{A\cdot\sin(\omega t + \alpha)}_{\text{Eigenschwingung}} + \underbrace{\frac{Q}{\omega^2 - \omega_0^2}\sin\omega_0 t}_{\text{Erregerschwingung}}$$

Amplitude A errechnet sich aus den Anfangsbedingungen, die konkrete Werte für C_1, C_2 und damit für A ergeben.

Amplitude $\frac{Q}{\omega^2-\omega_0^2}$ der Erregerschwingung hängt von Erregerfrequenz ω_0 und Erregerkraft Q ab.

Je näher ω_0 bei ω liegt, um so größer ist die Erregeramplitude $\frac{Q}{\omega^2-\omega_0^2}$.

$\boxed{\omega = \omega_0}$ Definition: Die Erscheinung: Eigenfrequenz = Erregerfrequenz, d.h. $\omega = \omega_0$, heißt Resonanz.

$$x(t) = A\cdot\sin(\omega t + \alpha) - \underbrace{\frac{Q}{2\omega}\,t\cos\omega t}_{\text{Erregerschwingung}}.$$

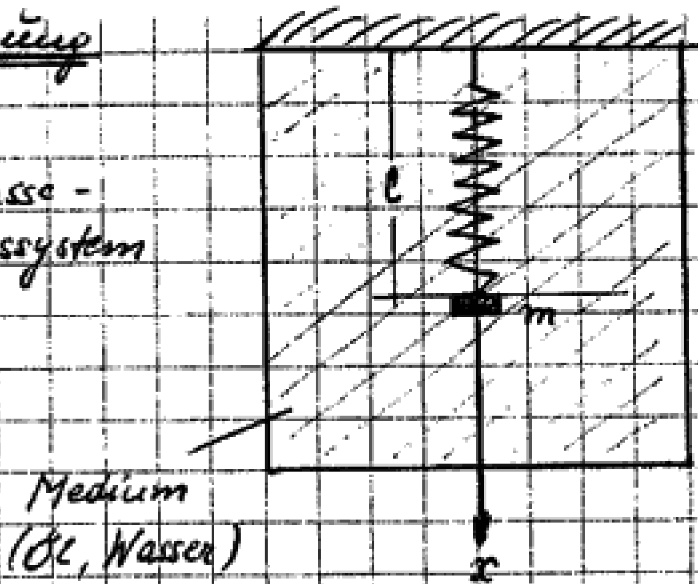
Die Amplitude $\frac{Q}{2\omega}\cdot t$ der Erregerschwingung wird im Verlaufe der Zeit ($t \to +\infty$) immer größer

(Resonanz)

Deutet man $x(t)$ als Weg-Zeit-Gesetz einer Schwingung eines mechanischen Systems, dann wird dieses System bei $t \to \infty$ zerstört, wenn keine Gegenmaßnahmen ergriffen werden, die die Resonanz verhindern.

3. Gedämpfte Schwingung

Feder-Masse-Dämpfungssystem



Kolbendämpfer

Dämpfungskraft des Mediums: hemmt Bewegung des Körpers und ist stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt.

Größe: proportional der Geschwindigkeit

$-2mn\dot{x}$ (m - Masse)

Störkraft: ist eine äußere Kraft, die auf die Masse wirkt, (Wind u.ä.) ist nach oben oder unten gerichtet, hängt nicht von Lage des Massepunktes ab, ist eine Funktion der Zeit: $S(t)$

$$S(t) = \begin{matrix} Q_m \cdot \sin\omega t \\ Q_m \cdot \cos\omega t \end{matrix}$$

Das 2. Newtonsche Gesetz ergibt nun bei Vorhandensein aller 3 Kräfte die Dgl.

$$m\ddot{x} = \underbrace{R}_{\text{Federrückstellkraft}} + \underbrace{D}_{\text{Dämpfungskraft des Mediums}} + \underbrace{S}_{\text{Störkraft}} = -k^2x - 2mn\dot{x} + S(t).$$

Die Lage des Massepunktes $x(t)$ zum Zeitpunkt t genügt der Differentialgleichung

$$\boxed{m\ddot{x} + 2mn\dot{x} + k^2x = S(t)}$$

m, k^2, n wichtige Konst.

Wir betrachten jetzt die gedämpfte (freie) Schwingung, d.h. $S(t) \equiv 0$ und haben somit die Dgl.

$$m\ddot{x} + 2mn\dot{x} + k^2x = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2x = 0$$

zu untersuchen.

Charakt. Gleichung: $P(\lambda) = \lambda^2 + 2n\lambda + \omega^2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

1) $n > \omega$: 2 reelle verschiedene Wurzeln

2) $n = \omega$: $\lambda_1 = \lambda_2$

3) $n < \omega$: Paar kompl. konj. Wurzeln

Hier untersuchen wir den für die Praxis sehr wichtigen Fall 3), bei dem die Dämpfung nicht zu stark ist: $\boxed{n<\omega}$

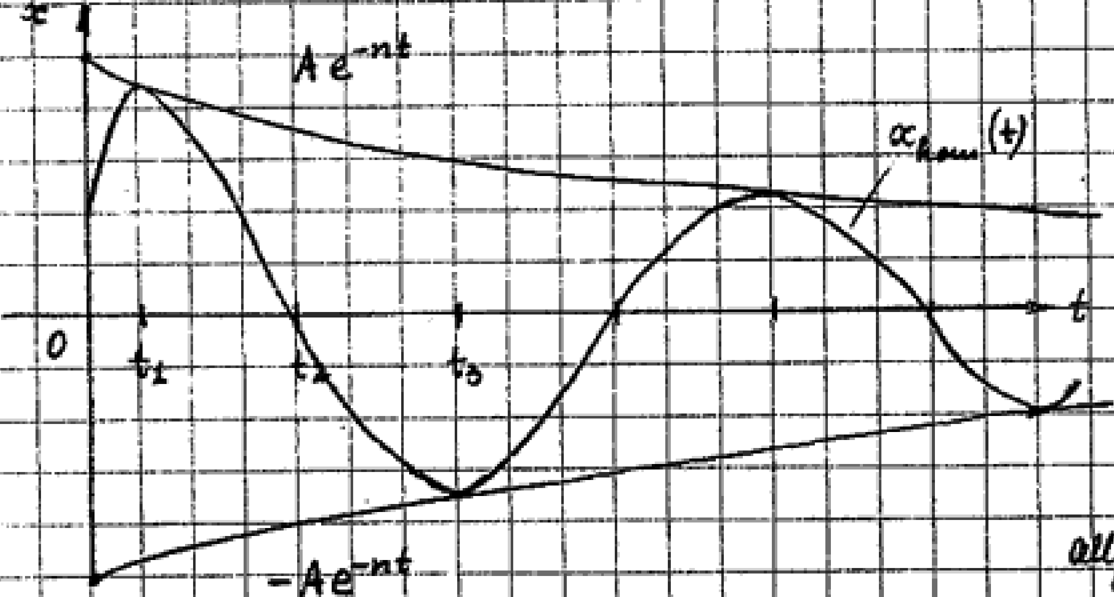
Bei $\gamma = \sqrt{\omega^2-n^2} \rightsquigarrow \lambda_1 = -n+i\gamma$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -n-i\gamma$.

$\rightsquigarrow$ komplexe Lösung: $\tilde{x}(t) = e^{(-n+i\gamma)t} = e^{-nt}(\cos\gamma t + i\sin\gamma t)$

$\rightsquigarrow$ 2 reelle Lösungen: $\varphi_1(t) = e^{-nt}\cos\gamma t$, $\varphi_2(t) = e^{-nt}\sin\gamma t$, lin. unabhängig

Allgemeine Lösung: $x_{hom}(t) = e^{-nt}(c_1\cos\gamma t + c_2\sin\gamma t) = \underline{Ae^{-nt}\sin(\gamma t+\alpha)}$

Umformungen und Bezeichnungen wie für freie Schwingung $\quad \gamma = \sqrt{\omega^2-n^2}$



„Abklingen" der Schwingung!

$\sin(\gamma t+\alpha) = 1 \rightsquigarrow t_1 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$\sin(\gamma t+\alpha) = 0 \rightsquigarrow t_2 = \frac{1}{\gamma}(\pi-\alpha)$

$\sin(\gamma t+\alpha) = -1 \rightsquigarrow t_3 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$

Allgemein: $t_{4k-3} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{4k-3}{2}\pi-\alpha\right)$

$t_{4k-1} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{4k-1}{2}\pi-\alpha\right) \quad k=1,2,\dots$

$t_{2k} = \frac{1}{\gamma}(k\pi-\alpha)$

4. Erzwungene gedämpfte Schwingung

Wir betrachten $S(t) = Q\cdot m\cdot\sin\omega_0 t$, so daß sich als Bewegungsgleichung

die Dgl. $L(x) = \ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = Q\cdot\sin\omega_0 t$ ergibt.

Wir betrachten hier ebenfalls den Fall $\boxed{n<\omega}$

Dann sind $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2-\omega^2}$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der zugehörigen homogenen Dgl.
Offensichtlich ist $i\omega_0$ keine Wurzel der charakt. Gleichung, somit kann bei $n \neq 0$ niemals Resonanz auftreten, obwohl $\omega = \omega_0$ sein kann.

Die allg. Lösung der homog. Gl. ist lt. Pkt. 3. $x_{hom}(t) = Ae^{-nt}\sin(\gamma t+\alpha)$
mit $\gamma = \sqrt{\omega^2-n^2}$

Der Ansatz für die spezielle Lösung der inhomog. Dgl. erfolgt nun als

$$\psi(t) = C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t.$$

Setzt man $B = \sqrt{C^2+D^2}$ und faßt man $\frac{C}{B}$ und $\frac{D}{B}$ als Sinus und Cosinus eines Winkels β auf, dann hat man

$$\psi(t) = B\left(\frac{C}{\sqrt{C^2+D^2}}\cos\omega_0 t + \frac{D}{\sqrt{C^2+D^2}}\sin\omega_0 t\right) = B\sin(\omega_0 t+\beta).$$

Wir setzen ψ in die Gl. $L(\psi) = Q \sin \omega_0 t$ ein und bestimmen B und β.

$$L(\psi) = -B\omega_0^2 \sin(\omega_0 t+\beta) + 2nB\omega_0 \cos(\omega_0 t+\beta) + \omega^2 B \sin(\omega_0 t+\beta) = Q \sin\omega_0 t$$

Mit $\omega_0 t + \beta = \Theta$ führt man Koeffizientenvergleich durch:

$$-B\omega_0^2 \sin\Theta + 2nB\omega_0 \cos\Theta + \omega^2 B \sin\Theta = Q\cdot\sin(\Theta-\beta) = Q(\sin\Theta\cos\beta - \cos\Theta\sin\beta)$$

$$\left.\begin{aligned}(-B\omega_0^2 + B\omega^2)\sin\Theta &= Q\cos\beta\sin\Theta\\ 2nB\omega_0 \cos\Theta &= -Q\sin\beta\cos\Theta\end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned}B(\omega^2-\omega_0^2) &= Q\cos\beta\\ 2nB\omega_0 &= -Q\sin\beta\end{aligned}$$

Quadrieren, addieren

$$B = \frac{Q}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4n^2\omega_0^2}} .$$

Für $\cos\beta$ ergibt sich

$$\cos\beta = \frac{B(\omega^2-\omega_0^2)}{Q} = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega_0^2}}, \rightsquigarrow \beta \text{ kann jetzt berechnet werden}$$

Allgemeine Lösung der inhom. Gl.:

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-nt}\sin(\gamma t+\alpha)}_{\text{Eigenschwingung}} + \underbrace{\frac{Q}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega_0^2}}\sin(\omega_0 t+\beta)}_{\text{Erregerschwingung}}$$

Es galt: $\gamma = \sqrt{\omega^2 - n^2}$.

Man sieht, die Erregeramplitude $\dfrac{Q}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega_0^2}}$ hängt nicht von der Zeit t ab.

Wir berechnen B_{max}: $B = B(\omega_0)$ abhängig von der Erregerfrequenz ω_0.

$$B(\omega_0) = \frac{Q}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega_0^2}} . \quad B'_{\omega_0} = \frac{-Q\,\dfrac{1\cdot 2(\omega^2-\omega_0^2)\cdot(-2\omega_0)+8n^2\omega_0}{2\sqrt{}}}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4n^2\omega_0^2} = 0$$

$$\rightsquigarrow 2(\omega^2-\omega_0^2)\cdot(-2\omega_0) + 8n^2\omega_0 = 0 \rightsquigarrow -(\omega^2-\omega_0^2)\omega_0 + 2n^2\omega_0 = 0$$

$$\xrightarrow[\omega_0\neq 0]{} \boxed{2n^2 - \omega^2 + \omega_0^2 = 0} \quad\left.\begin{aligned}&\\ \gamma^2 = \omega^2 - n^2 \rightsquigarrow n^2-\omega^2 = -\gamma^2\end{aligned}\right\} \quad n^2 + \underbrace{(n^2-\omega^2)}_{-\gamma^2} + \omega_0^2 = 0 \quad \boxed{\omega_0^2 = \gamma^2 - n^2}$$

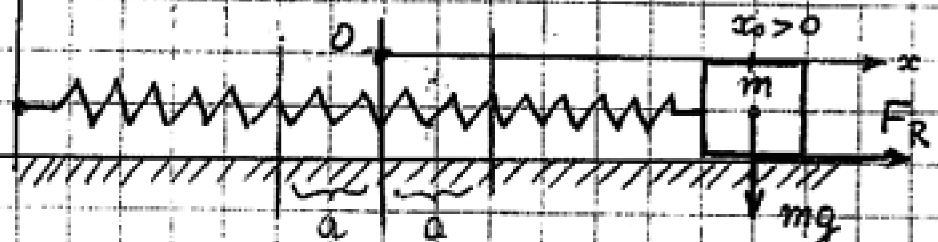
$$B_{max} = B(\sqrt{\gamma^2-n^2}) = \frac{Q}{\sqrt{(\omega^2-\gamma^2+n^2)^2+4n^2(\gamma^2-n^2)}} = \frac{Q}{2n\gamma} .$$

$B''(\sqrt{\gamma^2-n^2}) < 0$

$$\omega^2 = \gamma^2 + n^2 \rightsquigarrow (\cancel{\gamma^2} + n^2 - \cancel{\gamma^2} + n^2)^2 + 4n^2(\gamma^2 - n^2) = \cancel{4n^4} + 4n^2\gamma^2 - \cancel{4n^4}$$

Der Maximalwert der Erregeramplitude ist $\dfrac{Q}{2n\gamma}$, und wird bei der Erregerfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\gamma^2-n^2} = \sqrt{\omega^2-2n^2}$ angenommen. Für die Konstruktion eines Schwingungssystems ist diese Frequenz von Interesse.

5. Schwingung mit Reibungswiderstand



Wir betrachten den Fall, daß die Feder gedehnt würde $x_0>0$ und dann mit Geschwindigkeit $\dot{x}_0 = 0$ losgelassen wird.

Gleitreibung: wirkt der Bewegung entgegen und ist unabhängig von der Lage des Körpers, unabhängig von der Zeit t.

• Reibungskraft ist proportional dem Gewicht:

$$F_R = \mu mg$$

Reibungskoeffizient hängt ab von Material u. Oberflächenbeschaffenheit des Körpers.

μ_0 - Haftreibungskoeffizient, charakterisiert die Größe der Kraft, bei der der Körper liegen bleibt Ruhereibung.

$\boxed{\mu < \mu_0}$ Bewegung $\mu \geq \mu_0$ (keine Bewegung, Ruhe)

Differentialgleichung: $m\ddot{x} + k^2 x = \pm \mu mg$ "+" bei Bewegung $\leftarrow$, "−" bei Bewegung $\rightarrow$

Ruhebereich: $[-a, a]$ ist gekennzeichnet durch die Gleichheit von Rückstellkraft der Feder und der Reibungskraft bei Haftreibung mit Koeffizienten μ_0:

$$k^2 a = \mu_0 mg \rightsquigarrow a = \frac{\mu_0 g}{\frac{k^2}{m}} = \frac{\mu_0 g}{\omega^2}.$$

Dgl kann als $\ddot{x} + \omega^2 x = \pm \mu g$ geschrieben werden. $\leftarrow$ $\rightarrow$

$x_{hom}(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$ bekannt. $\Psi(t) = B$ $\ddot{\Psi} = \dot{\Psi} = 0$

$\omega^2 B = \pm \mu g$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = x_{hom}(t) \pm \frac{\mu g}{\omega^2} \qquad \Psi(t) = \pm \frac{\mu g}{\omega^2}$$

Aus den Anfangsbedingungen: $t_0 = 0$ $x(t_0) = x_0 > a$, $\dot{x}(t_0) = 0$ ermitteln wir c_1 und c_2.

$$x_0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \pm \frac{\mu g}{\omega^2} \rightsquigarrow c_1 = x_0 \mp \frac{\mu g}{\omega^2}$$

$$\dot{x}(t_0) = 0 = -\omega c_1 \sin\omega 0 + c_2 \omega \cos 0 \rightsquigarrow c_2 = 0$$

Lösung im Intervall $0 \le t \le t_1$ (solange Bewegung $\leftarrow$ vollzogen wird)

$$\boxed{x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right)\cos\omega t + \frac{\mu g}{\omega^2}} = +\frac{\mu g}{\omega^2} - \left(\frac{\mu g}{\omega^2} - x_0\right)\cos\omega t.$$

$t_1 = \frac{\pi}{\omega}$, dort erfolgt Umkehrung der Bewegungsrichtung in $\rightarrow$

Lösung im Intervall $t_1 \le t \le t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t - \frac{\mu g}{\omega^2}} \\ x(t_1) = \text{aus vorhergehender Dgl.} \\ \dot{x}(t_1) = 0 \quad \text{Umkehrung der Bewegung} \end{array} \right.$$

$$x(t_1) = x\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right) \underbrace{\cos\omega\frac{\pi}{\omega}}_{-1} + \frac{\mu g}{\omega^2} = \left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right)(-1) + \frac{\mu g}{\omega^2} = \underline{\underline{\frac{2\mu g}{\omega^2} - x_0}}$$

Also kann man C_1 und C_2 für dieses Problem ermitteln:

$$\frac{2\mu g}{\omega^2} - x_0 = C_1 \underbrace{\cos\omega t_1}_{-1} + C_2 \underbrace{\sin\omega t_1}_{=0} - \frac{\mu g}{\omega^2} \rightsquigarrow C_1 = -\frac{3\mu g}{\omega^2} + x_0$$

$$\dot{x}(t_1) = 0 = -C_1\omega \underbrace{\sin\omega t_1}_{=0} + C_2\omega \underbrace{\cos\omega t_1}_{-1} \rightsquigarrow C_2 = 0$$

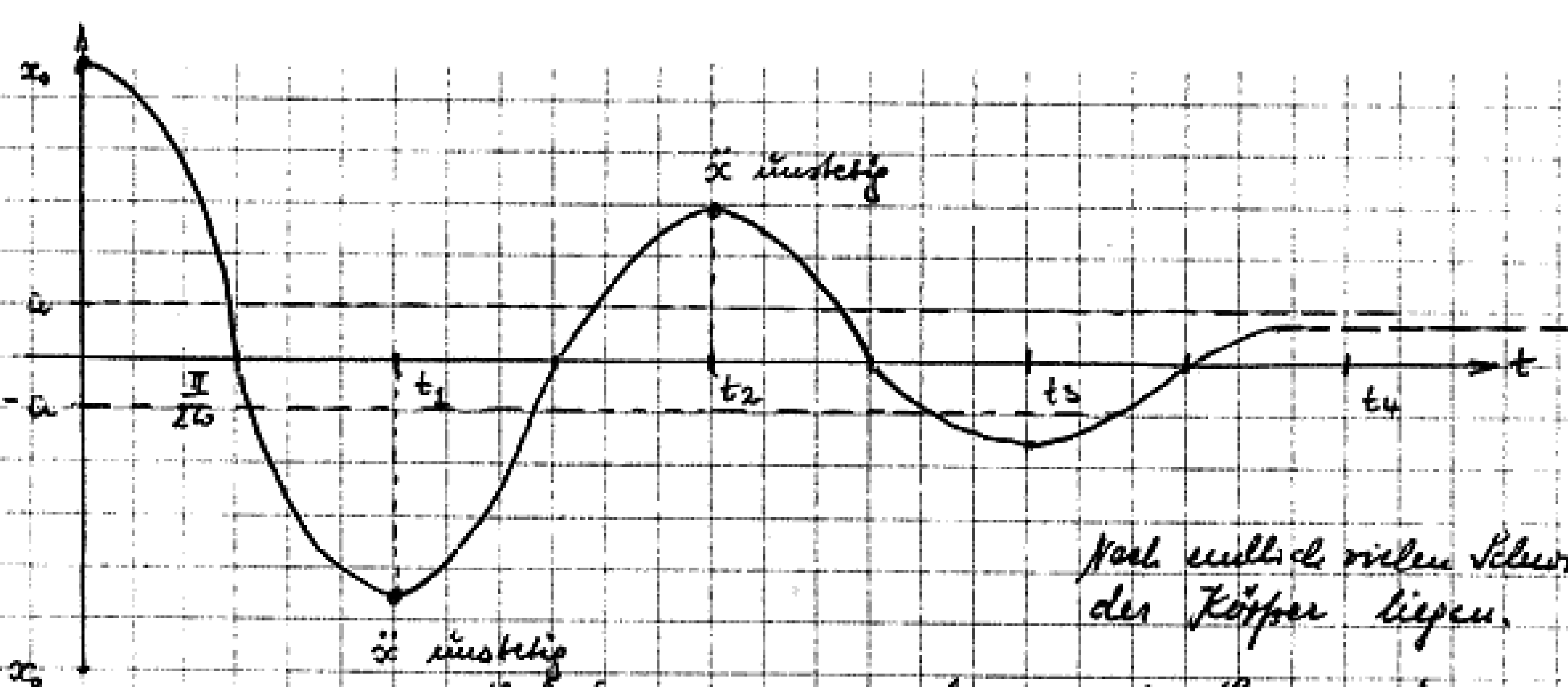
$$\boxed{x(t) = -\frac{\mu g}{\omega^2} - \left(\frac{3\mu g}{\omega^2} - x_0\right)\cos\omega t} \quad \frac{\pi}{\omega} = t_1 \le t \le t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$$

Lösung im Intervall $t_2 \le t \le t_3 = \frac{3\pi}{\omega}$.

$$x(t_2) = x_0 - \frac{4\mu g}{\omega^2} \quad \text{(wieder aus vorhergehender Dgl.)} \quad t_2 = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \dot{x}(t_2) = 0$$

$$C_1 = x_0 - \frac{5\mu g}{\omega^2}, \quad C_2 = 0.$$

$$\rightsquigarrow \boxed{x(t) = +\frac{\mu g}{\omega^2} - \left(\frac{5\mu g}{\omega^2} - x_0\right)\cos\omega t}$$



Nach endlich vielen Schwingungen bleibt der Körper liegen.

$$(\leftarrow)\ \ddot{x}(t_1) = \omega^2\left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega^2}\right)$$

$$(\rightarrow)\ \ddot{x}(t_1) = \omega^2\left(x_0 - \frac{3\mu g}{\omega^2}\right)$$

Sprung in 2. Ableitung: $2\mu g$

Anzahl der Schwingungen:

k Schwingungen von $0 \le t \le t_{2k}$

Körper bleibt liegen, wenn Amplitude zum Zeitpunkt t'_{2k} nur noch $a = \frac{\mu_0 g}{\omega^2}$ ist.

$$|x(t_{2k})| = |x_{2k}| = x_0 - \frac{4k\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu_0 g}{\omega^2}.$$

$$x(t_{2k}) = -\frac{\mu g}{\omega^2} - \frac{(2(2k-1)\mu g}{\omega^2} + x_0$$

(aus Formel für Intervall $[t_{2k-1}, t_k]$)

$$4k = \frac{x_0\omega^2}{\mu g} - \frac{\mu_0 g \omega^2}{\omega^2 \mu g}$$

$$\boxed{k \approx \frac{x_0\omega^2}{4\mu g} - \frac{1}{4}\frac{\mu_0}{\mu}}$$