Institut für
Theoretische Physik
Prof. Dr. G. Soff

Theoretische Mechanik SS 04

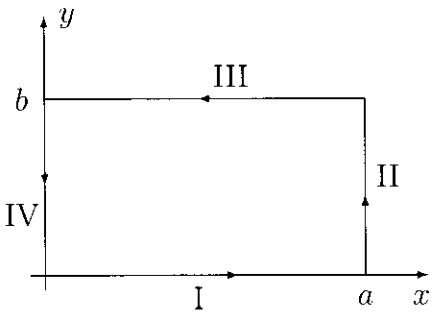
Lösung zur 3. Übung

1. (a) *Parameterdarstellung* des Kreises: Parameter φ, $\varphi = 0 \ldots 2\pi$

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= R\cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad & \mathrm{d}x &= -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ y(\varphi) &= R\sin\varphi & \mathrm{d}y &= \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

$$s = \oint \mathrm{d}s = \oint \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, R = 2\pi R$$

(b) *Parameterdarstellung* der vier Seiten:

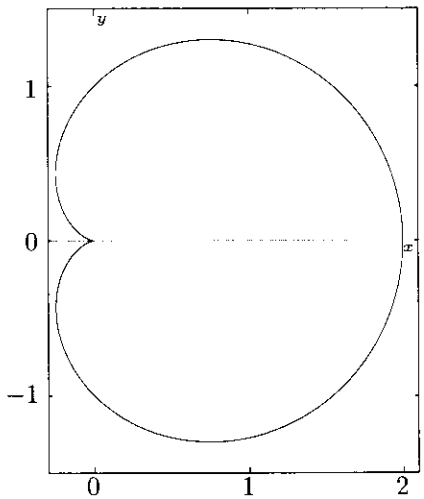


I: Parameter: $x = 0 \ldots a$, $y = 0$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}x|$
II: Parameter: $y = 0 \ldots b$, $x = a$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}y|$
III: Parameter: $x = a \ldots 0$, $y = b$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}x|$
IV: Parameter: $y = b \ldots 0$, $x = 0$; $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}y|$

$$s = \oint \mathrm{d}s = \int_{\mathrm{I}} \mathrm{d}s + \int_{\mathrm{II}} \mathrm{d}s + \int_{\mathrm{III}} \mathrm{d}s + \int_{\mathrm{IV}} \mathrm{d}s = 2\int_0^a \mathrm{d}x + 2\int_0^b \mathrm{d}y = 2(a+b)$$

*(c) *Vorbemerkung:* Die Kardioide wird durch einen markierten Punkt auf dem Umfang eines Kreises beschrieben, wenn dieser an einem festen Kreis mit gleichem Durchmesser a abrollt ohne zu rutschen.

Das Bogenlängenelement in ebenen Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten mit $z = 0$ oder Kugelkoordinaten mit $\vartheta = \pi/2$) erhält man wie folgt:



Kardioide $\rho(\varphi) = 1 + \cos\varphi$

$$\begin{aligned} \vec{r}(\varphi) &= \rho(\varphi)\,\vec{e}_\rho(\varphi) \Longrightarrow \\ \mathrm{d}\vec{r} &= \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{e}_\rho + \rho\vec{e}_\varphi\right)\mathrm{d}\varphi\,; \end{aligned}$$

damit wird

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}\,| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + \rho^2}\,\mathrm{d}\varphi\,. \quad \text{Wegen } \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} = -a\sin\varphi \quad \text{erhalten wir}$$

$$s = \oint \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2} = \sqrt{2}\,a\;2\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{1+\cos\varphi}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen wurde noch berücksichtigt, daß der Integrand symmetrisch zu $\varphi = \pi$ ist. Das Integral kann mit der Substitution $\cos\varphi = u$ gelöst werden (beachte: $\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}u/\sqrt{1-u^2}$)

$$s = 2\sqrt{2}\,a \int_{-1}^{1} \mathrm{d}u\, \frac{\sqrt{1+u}}{\sqrt{1-u^2}} = 2\sqrt{2}\,a \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u}} = 2\sqrt{2}\,a \left(-2\sqrt{1-u}\Big|_{-1}^{+1} \right) = 8a$$

Bem.: Andere Möglichkeit unter Benutzung eines Additionstheorems:

$$\begin{aligned} s &= 2\sqrt{2}\,a \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \sqrt{1+\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)} = 2\sqrt{2}\,a \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \sqrt{1+\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \\ &= 2\sqrt{2}\,a\,\sqrt{2}\,2 \int_0^{\pi} \mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,a\,\sqrt{2}\,2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\psi\, \cos\psi = 8a \end{aligned}$$

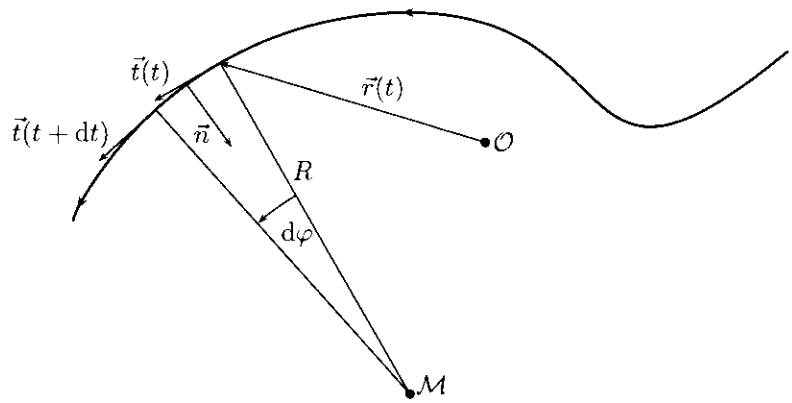
2. Für die Geschwindigkeit gilt ($\mathrm{d}s$ sei die in $\mathrm{d}t$ von der Punktmasse zurückgelegte Bogenlänge; siehe auch Vorlesung):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = v\vec{t} \quad \text{mit} \quad \vec{t} = \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}; \quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}; \quad \mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$$

Damit erhalten wir für die Beschleunigung (beachte: $v(t)$ und $\vec{t}(t)$; Produktregel!):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{t} + v\,\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}$$

Diskussion von $\mathrm{d}\vec{t}$:



Da $\vec{t}$ ein Einheitsvektor ist, muß seine Änderung $\mathrm{d}\vec{t}$ senkrecht zu $\vec{t}$ sein:

$$\vec{t}^{\,2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{t}\cdot\mathrm{d}\vec{t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\vec{t} \perp \vec{t}$$

$\vec{t}$, $\vec{t}+\mathrm{d}\vec{t}$ sowie das in $\mathrm{d}t$ überstrichene Kurvenstück liegen in einer Ebene, der sog. *Schmiegungsebene*; damit liegt auch $\mathrm{d}\vec{t}$ in derselben Ebene. Der Einheitsvektor $\vec{n}$ in Richtung von $\mathrm{d}\vec{t}$ heißt *Hauptnormale*. Approximieren wir das während $\mathrm{d}t$ zurückgelegte Bahnkurvenelement durch einen Kreisbogen vom Radius R (*momentaner Krümmungsradius der Kurve*), so zeigt $\vec{n}$ zum *momentanen Krümmungsmittelpunkt*

$\mathcal{M}$; der Radius R überstreicht während $\mathrm{d}t$ den Winkel $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}s/R$. Der Winkel zwischen $\vec{t}$ und $\vec{t} + \mathrm{d}\vec{t}$ ist ebenfalls $\mathrm{d}\varphi$ (Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen). Es gilt also:

$$|\mathrm{d}\vec{t}| = \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}s}{R} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}\vec{t} = \vec{n}\,\frac{\mathrm{d}s}{R} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t} = \vec{n}\,\frac{v}{R} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{a} = \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\,\vec{n}} \quad \text{q.e.d.}$$

Die für die Bewegung auf der Bahnkurve notwendige Kraft ist (zweites NEWTONsches Axiom):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\,\vec{n}\right)$$

Der erste Term $m\dot{v}\vec{t}$ ist die *Tangentialkraft*, die das Teilchen in Tangentialrichtung beschleunigt, also den *Betrag* der Geschwindigkeit ändert.
Der zweite Term $\vec{n}\,v^2/R$ ist die *Normal-* oder *Radialkraft*, die die *Richtung* der Geschwindigkeit ändert, damit *senkrecht auf der Bahn* steht und stets zum momentanen Krümmungsmittelpunkt zeigt.

Speziell: **Kreisbewegung:** R=const; $\vec{r} = R\vec{e}_\rho$
Wir verwenden *ebene Polarkoordinaten* (die sich aus den Zylinderkoordinaten für $z = 0$ ergeben).

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = R\,\dot{\vec{e}}_\rho = R\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_\varphi \quad \Longrightarrow \quad \vec{t} = \vec{e}_\varphi\,;$$

$$\vec{n} = \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}}{\left|\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t}\right|}\,; \quad \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\vec{e}_\rho\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \Longrightarrow \quad \vec{n} = -\vec{e}_\rho$$

$$\vec{F} = m\left(\dot{v}\vec{e}_\varphi - \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_\rho\right)$$

(a)

$$v = const \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = -m\,\frac{v^2}{R}\,\vec{e}_\rho$$

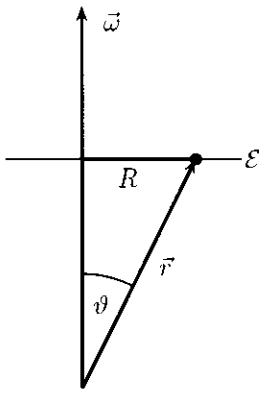
Es muß also nur eine Radialkraft wirken, die die Richtung der Geschwindigkeit ändert.

(b)

$$v = ct \quad \Longrightarrow \quad \vec{F} = m\left(c\vec{e}_\varphi - \frac{c^2t^2}{R}\,\vec{e}_\rho\right)$$

Zusätzlich zur Radialkraft muß noch eine Tangentialkraft wirken, die den Betrag der Geschwindigkeit erhöht.

3.



$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Durch skalare Multiplikation dieser Relation mit $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ erhalten wir alle notwendigen Aussagen über die Bewegung:

$$0 = \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{r}} \perp \vec{\omega}$$

Die *Bewegung* erfolgt also stets *in einer Ebene $\mathcal{E}$ senkrecht zum Vektor $\vec{\omega}$.*

$$0 = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\vec{r}^{\,2}}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad |\vec{r}| = const$$

Es handelt sich also um eine *Kreisbewegung* in einer Ebene senkrecht zu $\vec{\omega}$. Beachten wir, daß $\vec{\omega}$ und $|\vec{r}|$ konstant sind, ergibt eine Umformung der ersten Relation:

$$0 = \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \omega |\vec{r}| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos\vartheta \quad \Longrightarrow \quad \vartheta = const$$

Damit ist die Lage der Ebene $\mathcal{E}$ fixiert und für den Radius des Kreises erhalten wir: $R = r \sin\vartheta$. Die konkreten Werte von r und ϑ werden durch die *Anfangsbedingungen* für die Bewegung festgelegt.