Theoretische Mechanik im SS 04

Testbogen 5

1. Ein Körper der Masse m wird mit der Anfangsgeschwindigkeit Null in der Höhe h im (homogenen) Schwerefeld der Erde losgelassen. Wie hängen die Fallzeit und die Aufprallgeschwindigkeit von der Höhe h und von der Masse m ab, wenn man die Reibung vernachlässigt?
Eine Papierkugel und eine schwerere Bleikugel werden gleichzeitig aus gleicher Höhe fallen gelassen. Welche Kugel trifft eher auf dem Erdboden auf, wenn man Reibungseffekte wiederum vernachlässigt?
Das der ersten Frage zugrundeliegende Experiment wird jetzt auf dem Erdmond ausgeführt. Welche quantitative Aussage können Sie über die Fallbeschleuningung nahe der Oberfläche auf dem Mond im Vergleich zu der auf der Erde treffen?

2. Durch welche Transformation wird der Übergang von der Lagrange-Funktion zur Hamilton-Funktion erreicht? Wie lauten die kanonischen Gleichungen? Wie lautet die Hamilton-Funktion für ein freies Teilchen? Wie sieht die Bewegungsgleichung aus, die man dann beim Auswerten der kanonischen Gleichungen erhält?
Geben Sie die Gleichung für die totale Zeitableitung einer mechanischen Observablen $\mathcal{O}$ im Poisson-Klammer-Formalismus an.

3. Berechnen Sie $\frac{\partial r}{\partial x_i}$. Hinweis: $r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}^2} = \sqrt{x_j x_j}$ (Summenkonvention beachten, Indizes laufen von 1 bis 3).

4. Welche Vektorgleichung verbirgt sich hinter $\dot{x}_i = \epsilon_{ijk}\omega_j x_k$ (Summenkonvention: Indizes laufen von 1 bis 3) und welche Bewegung kann damit in einem Inertialsystem beschrieben werden ($\omega_l = \text{const}$)? Wie heisst die Kraft, welche diese Bewegung erzwingt? Geben Sie diese Kraft an.

5. Gegeben ist das Potential $V(\vec{r}) = \frac{k}{2}\vec{r}^2$. Berechnen Sie die Kraft die diesem Potential entspricht. Welche Bewegung wird durch diese Kraft vermittelt?
Welchem Potentialtyp unterliegt die Planetenbewegung? Geben Sie das Potential an, berechnen und charakterisieren Sie die zugehörige Kraft. Welche Erhaltungssätze liegen der Planetenbewegung zugrunde und wie sieht der Energiesatz aus, in dem sich dieser Sachverhalt manifestiert? Von welcher geometrischen Form sind dann die Planeten- oder Ko-

6. Wie lautet die Galilei-Transformation des Ortsvektors $\vec{r}$ wenn man zum Inertialsystem Σ' übergeht, welches sich mit $\vec{v}_0$ relativ zu Σ bewegt? Mit welcher Geschwindigkeit $\vec{v}'$ bewegt sich ein Teilchen in Σ', wenn es sich in Σ mit $-\vec{v}$ bewegt?
Welche Transformation tritt an die Stelle der Galilei-Transformation in der speziellen Relativitätstheorie?

***)** Gegeben ist die Lagrange-Funktion L mit $L = L(q, \dot{q}, t)$ und die Hamilton-Funktion H mit $H = H(q, p, t) = p\,\dot{q} - L$. Wie lautet das totale Differential von L?. Was gilt für $\frac{dL}{dt}$ (Hinweis: Euler-Lagrange Gleichung einarbeiten)? Welche Aussage kann man dann sofort über $\frac{dH}{dt}$ treffen? Welchen Erhaltungssatz hat die explizite Zeitunabhängigkeit von L zur Folge?