Theoretische Mechanik im SS 04

Testbogen 6

1. Geben Sie den Ortsvektor unter Nutzung der jeweiligen Einheitsvektoren $\vec{e}_{..}$ in kartesischen Koordinaten, Zylinder- und Kugelkoordinaten an. Was ergibt sich für den Geschwindigkeitsvektor in kartesischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten?
   Ist die Erde ein Inertialsystem, begründen Sie ihre Aussage. Wie nennt man die in Nicht-Inertialsystemen Σ' auftretenden zusätzlichen Kräfte? Wie nennt man die Kraft die durch $\vec{F}' = -2m\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$ beschrieben wird?

2. Wie lauten die Euler-Lagrange Gleichungen und wie sieht die Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen aus? Auf welche Bewegungsgleichung wird man dann beim Auswerten der Euler-Lagrange Gleichungen geführt?
   Geben Sie die Gleichung für die totale Zeitableitung einer mechanischen Observablen $\mathcal{O}$ im Poisson-Klammer-Formalismus an.

3. Berechnen Sie $\frac{\partial x_i}{\partial x_i}$ und $\delta_{km}\frac{\partial y_k}{\partial y_m}$ (Summenkonvention beachten, Indizes laufen von 1 bis 3, $\delta_{nm} = 1$ für $n = m$ sonst $\delta_{nm} = 0$).

4. Wie lautet der Energiesatz für Mehrteilchensysteme beim Fehlen von dissipativen Kräften? Geben Sie die kinetische und potentielle Energie für N Teilchen explizit an, spalten Sie dabei das Gesamtpotential bezüglich innerer (Zwei-Teilchen-Wechselwirkungspotential $V_{ij}(r_{ij})$) und äusserer ($V_i(\vec{r}_i)$) Beiträge auf.
   Betrachten Sie qualitativ die Planetenbewegung als Zweikörperproblem: Was kann im Falle von Ellipsenbahnen über deren Halbachsen und Umlaufzeiten ausgesagt werden?

5. Begründen Sie die Drehimpulserhaltung im Zentralkraftfeld. Was bedeutet das für die resultierende Bewegung? Zeigen Sie, dass sich bei geeigneter Wahl von ϑ der Drehimpuls zu $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$ ergibt (Hinweis: $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\,\vec{e}_\vartheta + r\sin\vartheta\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$).
   Wie lauten die Keplerschen Gesetze? Die Gesamtfläche einer Ellipse beträgt $A = \pi ab = T\frac{L}{2m}$. Berechnen Sie $\frac{T^2}{a^3}$ und verifizieren Sie damit eines der Keplerschen Gesetze (Hinweis: $b^2 = ak$ und $k = \frac{L^2}{\gamma M m^2}$).

6. Wie lautet die nicht- und die relativistische Energie-Impuls-Beziehung? Photonen (Lichtteilchen) sind masselos (haben keine Ruhemasse). Wie lautet in diesem Fall die relativistische Energie-Impuls-Beziehung?
   Wann nennt man eine physikalische Grösse eine "Invariante"?

*) Nutzen Sie die Vorteile der Viererschreibweise. Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte $s^2 = x^\mu x_\mu$, $I = x^\mu p_\mu$ und $\partial_\nu x^\nu$.
   Berechnen Sie $p_\kappa p^\kappa$ einmal direkt, und einmal unter Ausnutzung von $p^\mu = m_0 u^\mu$. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse in einer Gleichung. Auf welche bekannte Beziehung wird man geführt?
   Hinweise: Viererverektor $x^\mu = (ct, \vec{r})$, Viererimpuls $p^\mu = (E/c, \vec{p})$, Vierergeschwindigkeit $u^\mu = \gamma(c, \vec{u}) = (1/\sqrt{1 - u^2/c^2})(c, \vec{u})$, 4-dim. Nablaoperator $\frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu = (\frac{\partial}{c\partial t}, \vec{\nabla})$ (Summenkonvention und Minkowski-Metrik beachten, Indizes laufen jetzt von 0 bis 3).
   Die berechneten Grössen sind allesamt Skalare. Was kann man über ihr Verhalten unter Lorentz-Transformation aussagen?