Prof. Dr. R. Ketzmerick/Dr. R. Schumann
Technische Universität Dresden
Institut für Theoretische Physik

Sommersemester 2008

Theoretische Mechanik

3. Übung

Wiederholungsfragen

1. Was ist eine gewöhnliche, was eine partielle Differentialgleichung (DGL)?
2. Was versteht man unter der Ordnung einer DGL? Wie erkennt man, ob eine DGL linear ist? Wie erkennt man, was die Inhomogenität ist? Welche Bedeutung haben die Integrationskonstanten?
3. Frischen Sie die aus dem Abitur bekannten Begriffe Gleitreibung und Haftreibung auf!
4. Was versteht man unter einer Schwingung, unter Dämpfung, unter Resonanz?

3.1 Gebremstes Fahrzeug

Ein Fahrzeug (Masse m) bewegt sich geradlinig unter dem Einfluß einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft $F_R = -m \cdot \gamma \cdot \dot{x}$. Er beginnt seine Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 am Ort x_0.

a) Stellen Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung auf, und bestimmen Sie daraus $x(t)$ und $v(t)$ und skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen!

b) Bestimmen Sie, an welchem Punkt x_1 der Körper zur Ruhe kommt. Zu welchem Zeitpunkt t_1 hat der Körper die Strecke $s = (x_1 - x_0)/2$ zurückgelegt? Berechnen Sie die Arbeit

$$W(x) = \int_{x_0}^{x} dx' F_R$$

die von der Reibungskraft verrichtet wurde, wenn der Körper den Ort $x = x_0 + s$ erreicht hat.

c) Drücken Sie die Leistung

$$P(t) = \dot{W}$$

der Reibungskraft mit Hilfe der Kraft und der Geschwindigkeit aus und berechnen Sie diese in Abhängigkeit von der Zeit! Wie groß ist die mittlere Leistung

$$\bar{P} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

in der Zeitspanne, die das Fahrzeug zum Zurücklegen der Strecke s braucht?

3.2 Herabgleitendes Seil

Ein ausgestrecktes Seil (Länge l, Masse m) von dem man annehmen kann, daß die Masse des Seils homogen über die gesamte Seillänge verteilt ist und das gegen Biegungen keinen Widerstand aufweist, gleitet von einer Tischkante herab. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hängt ein Seilstück der Länge x_0 bewegungslos über die Kante senkrecht nach unten.

a) Wie groß muss x_0 sein, damit sich das Seil in Bewegung setzt (Haftreibungskoeffizient μ_H)?

b) Formulieren Sie die NEWTONsche Bewegungsgleichung und berechnen Sie die zum Zeitpunkt t über die Kante herabhängende Seillänge $x(t)$ unter Berücksichtigung der Gleitreibung (Gleitreibungskoeffizient μ_G)!

c) Berechnen Sie den Zeitpunkt T, ab welchem das Seil frei fällt.

3.3 Erzwungene Schwingung

Ein ungedämpfter harmonischer Oszillator (Masse m, Eigenfrequenz ω_0) ruhe bis zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Gleichgewichtslage. Es greift eine äußere Kraft $F(t)$ an, die entsprechend

$$F(t) = \left\{ \begin{matrix} 0 & t < 0\,, t > T \\ F_0 & 0 < t < T \end{matrix} \right\}$$

von der Zeit abhängt. Berechnen Sie $x(t)$ und finden Sie insbesondere die Schwingungsamplitude nach Abschalten der äußeren Kraft.

3.4 Periodische Erregung

An eine vertikal hängende Feder der Länge l_0 wird eine Masse m angehängt, wodurch sich die Feder auf die Länge l_1 dehnt. Anschließend wird die Masse ein kleines Stück weiter, bis l_2, nach unten gezogen und zum Zeitpunkt t_0 losgelassen, worauf die Masse vertikale Schwingungen ausführt. Nach etlichen Schwingungen ist zum Zeitpunkt t_1 die Amplitude dieser Schwingungen nur noch $|l_2 - l_1|/2$. Nachdem die Masse zum Stillstand gekommen ist, wird der Aufhängepunkt periodisch gemäß $z_A(t) = A_0 \sin \omega_E t$ bewegt.

a) Bestimmen Sie die Federkonstante der Feder, die Eigenfrequenz f_0 bzw. die Schwingungsdauer T_0 des ungedämpften Problems.

b) Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante und die Kreisfrequenz des gedämpften Oszillators!

c) Bestimmen Sie die Amplitude A und die Phasenverschiebung η der erzwungenen Schwingung für Zeiten $t \gg (t_1 - t_0)$ in Abhängigkeit von der Erregerkreisfrequenz ω_E! Bei welcher Frequenz ω_R wird die Amplitude maximal?

d) Stellen Sie $A(\omega_E)/A_0$ bzw. $\eta(\omega_E)$ als Funktionen von ω_E/ω_R grafisch dar.