Institut für
Theoretische Physik
PD Dr. G. Plunien

Theoretische Mechanik WS 04/05

2. Übung

1. **Fallende Kugel im Medium**
   Eine zur Zeit $t_0 = 0$ in der Höhe z_0 ruhende Kugel mit Radius R und Masse m befinde sich in einem ruhenden Medium der Viskosität η unter dem Einfluss eines homogenen Schwerefeldes $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Der Betrag der Reibungskraft sei proportional zur Geschwindigkeit der Kugel $|F_{\mathrm{R}}| = 6\pi\eta R\,|\dot{z}|$

   (a) Stellen Sie die DGL für die Bewegung der Kugel auf!

   (b) Lösen Sie diese DGL für die oben genannten Anfangsbedingungen!

2. **Basistransformationen**
   Bezüglich der kartesischen Basis $\vec{E}_x = (1,0,0)$, $\vec{E}_y = (0,1,0)$ und $\vec{E}_z = (0,0,1)$ sei die Basis $\vec{b}_1 = \vec{E}_x$, $\vec{b}_2 = \vec{E}_x + 2\vec{E}_y$ und $\vec{b}_3 = \vec{E}_y + 2\vec{E}_z$ gegeben.

   (a) Berechnen Sie die Koeffizienten $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = g_{ij}$ der Fundamentalform!

   (b) Konstruieren Sie mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation $\vec{b}_i \cdot \vec{b}^j = \delta_i^j$ die reziproken Basisvektoren $\vec{b}^j$!

   (c) Bestimmen Sie die Komponenten ξ_i und ξ^i eines beliebigen Ortsvektors $\vec{r} = x\vec{E}_x + y\vec{E}_y + z\vec{E}_z$ bezüglich der beiden Basissysteme $\{b_i\}$ und $\{b^i\}$. Wie lauten die Transformationsgleichungen $\xi_i = \xi_i(x,y,z)$ und $\xi^i = \xi^i(x,y,z)$?

   (d) Berechnen Sie das Skalarprodukt der beliebigen Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in der kartesischen und der schiefen Basis!

3. **Lineare Algebra**
   Ein System linearer Differentialgleichungen sei durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{mit der 2 x 2 Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   bestimmt.

   (a) Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A, d.h. alle Zahlen λ_i und Vektoren $\vec{r}_i$, welche $A\vec{r}_i = \lambda_i \vec{r}_i$ erfüllen!

   (b) Finden Sie die Komponenten von $\vec{r}(t) = x(t)\vec{E}_x + y(t)\vec{E}_y$ in der Basis der Eigenvektoren, d.h. bestimmen Sie $r_1(t) = r_1[x(t), y(t)]$ und $r_2(t) = r_2[x(t), y(t)]$!

   (c) Lösen Sie damit das System mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$!