Institut für
Theoretische Physik
PD Dr. G. Plunien

Theoretische Mechanik WS 04/05

3. Übung

1. **Algebra I: Vektoren**

   Beweisen Sie folgende Relationen

   (a) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2 = a^2b^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$,

   (b) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$,

   (c) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left[\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\right] = \left[\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]^2$.

2. **Algebra II: orthogonale Matrizen**

   Beweisen Sie mittels der Rechenregeln für orthogonale Matrizen folgende Aussagen:

   (a) Ist A orthogonal, so ist $\det A = \pm 1$.

   (b) Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.

   (c) Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.

3. **Algebra III: Drehungen**

   Die Drehung eines Vektors $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ in kartesischen Koordinaten um die x_2-Achse um den Winkel φ_2 wird beschrieben durch die Transformationsmatrix $D_2(\varphi_2)$ (siehe Vorlesung). Analog beschreibt die Matrix $D_3(\varphi_3)$ eine Drehung um die x_3-Achse um den Winkel φ_3.

   (a) Überzeugen Sie sich, dass D_2 und D_3 orthogonale Transformationen vermitteln.

   (b) Berechnen Sie die Matrizen $D_{23}(\varphi_2, \varphi_3) = D_2(\varphi_2)\, D_3(\varphi_3)$ und $D_{32}(\varphi_3, \varphi_2) = D_3(\varphi_3)\, D_2(\varphi_2)$ für die Hintereinanderausführung beider Drehungen in unterschiedlicher Reihenfolge. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. Was ergibt sich für die transformierten Vektoren im Spezialfall $\varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$?

   (c) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (1, 0, 0)$ und $\vec{b} = (1, 1, 0)$. Berechnen Sie deren Betrag und relativen Winkel vor und nach der Transformation mittels $D_{23}(\pi/2, \pi/2)$. Können Sie eine allgemeine Aussage über das Transformationsverhalten des Skalarproduktes unter orthogonalen Transformationen herleiten?

4. **Bewegung auf Bahnkurve**

   Ein Teilchen bewegt sich auf einer durch $\vec{r}(t)$ beschriebenen Bahnkurve. Zeigen Sie, dass sich die Beschleunigung $\vec{a}$ mit Hilfe des Betrags der Geschwindigkeit v und des Krümmungsradiuses R gemäss

   $$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_N}$$

   zerlegen lässt. Unter dem (momentanen) Krümmungsradius R der Bahnkurve versteht man den Radius des Kreisbogens, durch den die Bahnkurve im Zeitintervall $t \ldots t + \mathrm{d}t$ approximiert werden kann. Es gilt $\vec{e}_N = R\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_T}{\mathrm{d}s}$.

   Welche Kraft $\vec{F}$ muss also auf das Teilchen wirken, damit es sich auf einer gegebenen Bahnkurve bewegen kann?