Institut für
Theoretische Physik
PD Dr. G. Plunien

Theoretische Mechanik WS 04/05

4. Übung

1. **Teilchen auf Schraubenbahn**
   Ein Teilchen bewege sich auf einer Bahnkurve gegeben durch

$$\vec{r}(t) = R\cos\omega t\vec{E}_x + R\sin\omega t\vec{E}_y + b\omega t\vec{E}_z,$$

   wobei gilt R, ω und b sind konstant. Berechnen Sie für diese Bewegung

   (a) die Bogenlänge $s(t)$,

   (b) das begleitende Dreibein $\{\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_B\}$ und den Krümmungsradius der Bahn,

   (c) die Komponenten der Kraft, die notwendig ist um ein Teilchen auf die obige Bahnkurve zu zwingen, in Zylinderkoordinaten.

2. **Krummlinige Koordinaten** q^1, q^2, q^3 werden i.a. durch ihren Zusammenhang mit den kartesischen Koordinaten x, y, z definiert; damit wird der Ortsvektor $\vec{r}$ eine Funktion der q^1, q^2, q^3:

$$\vec{r}(q^1,q^2,q^3) = x(q^1,q^2,q^3)\vec{E}_x + y(q^1,q^2,q^3)\vec{E}_y + z(q^1,q^2,q^3)\vec{E}_z \equiv \sum_{k=1}^{3} x_k(q^1,q^2,q^3)\vec{E}_k\,.$$

   Eine *Koordinatenlinie* entsteht, wenn sich nur eine der krummlinigen Koordinaten ändert und die anderen beiden festgehalten werden. (Die q^1-Linie entsteht also, wenn sich nur q^1 ändert, q^2 und q^3 aber konstant gehalten werden.) Die zu den krummlinigen Koordinaten gehörenden normierten *Basisvektoren* $(\vec{e}_{q^1}, \vec{e}_{q^2}, \vec{e}_{q^3})$ werden allgemein als die *Tangenteneinheitsvektoren an die entsprechende Koordinatenlinie* definiert, also:

$$\vec{e}_{q^1} = \frac{\frac{\partial\vec{r}(q^1,q^2,q^3)}{\partial q^1}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(q^1,q^2,q^3)}{\partial q^1}\right|}\,, \quad \vec{e}_{q^2} = \frac{\frac{\partial\vec{r}(q^1,q^2,q^3)}{\partial q^2}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(q^1,q^2,q^3)}{\partial q^2}\right|}\,, \quad \vec{e}_{q^3} = \frac{\frac{\partial\vec{r}(q^1,q^2,q^3)}{\partial q^3}}{\left|\frac{\partial\vec{r}(q^1,q^2,q^3)}{\partial q^3}\right|}\,.$$

   Diskutieren Sie die Koordinatenlinien, berechnen Sie die Basisvektoren gemäss der angegebenen Vorschrift und stellen Sie den Ortsvektor in der neuen Basis für Kugelkoordinaten: $q^1 = r\,, q^2 = \vartheta\,, q^3 = \varphi$

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi\,, \quad z = r\cos\vartheta$$

   dar. Zerlegen Sie die Ableitungen der Basisvektoren bzgl. aller Koordinaten nach diesen Basisvektoren. Prüfen Sie in welcher Reihenfolge die Basisvektoren ein Rechtssystem bilden. Ausgehend von $\vec{r} = r\vec{e}_r$, berechnen Sie die Geschwindigkeit und Beschleunigung in Kugelkoordinaten. Dabei ist zu beachten, dass die zeitlichen Ableitungen der Basisvektoren in Kugelkoordinaten benötigt werden.

Bitte wenden!

3. **Raketengleichung**

Eine Rakete befinde sich in der Startphase und bewege sich senkrecht nach oben im (als konstant angenommenen) Schwerefeld der Erde. Es seien:

$m(t)$	momentane Masse der Rakete
$\mu = -\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} > 0$	Massenabnahme pro Zeit
$v(t)$	Geschwindigkeit der Rakete
v_g	(Betrag der) Austrittsgeschwindigkeit der Verbrennungsgase
ρ_g	Dichte der austretenden Verbrennungsgase
A	Düsenfläche

(a) Wie lautet die Bewegungsgleichung der Rakete?
Welcher Zusammenhang besteht zwischen μ und v_g?

(b) Finden Sie $v(t)$ unter der Annahme, dass v_g und μ konstant sind ($v(0) = 0$).
Unter welcher Bedingung ist $v(t) > 0$ in der Startphase?