Institut für
Theoretische Physik
PD Dr. G. Plunien

Theoretische Mechanik WS 04/05

6. Übung

1. Es sei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor, $r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$ und $f(r)$ eine beliebige, differenzierbare Funktion von r, berechnen Sie damit folgende Ausdrücke

$$\vec{\nabla} r\,, \quad \vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})\,, \quad \vec{\nabla}\frac{1}{r^2}\,, \quad \vec{\nabla} f(r)\,, \quad \vec{\nabla}\cos(\vec{a}\cdot\vec{r})\,.$$

2. Zeigen Sie, dass gilt: $\vec{\nabla}\, f(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\vec{\nabla}'\, f(\vec{r}-\vec{r}\,')\,.$

3. Zwei Punktmassen m_1 und m_2 an den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ wechselwirken über ein Potential

$$U(\vec{r}_2-\vec{r}_1) = -\gamma\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}\,. \tag{1}$$

Berechnen Sie die zugehörigen inneren Kräfte des Systems. Es mögen keine weiteren äusseren Kräfte vorliegen. Separieren Sie das Bewegungsproblem in eine Schwerpunkt und eine Relativbewegung, und lösen Sie die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes. Ist der Relativdrehimpuls dieses Systems eine Erhaltungsgrösse? Was ergibt sich für die Gesamtenergie der Relativbewegung unter Verwendung ebener Polarkoordinaten?

4. Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = a(3x-y)\,\vec{E}_x + b(2y-x)\,\vec{E}_y$ (a, b-const).

   (a) Welche Arbeit $W_{\mathcal{C}}$ verrichtet die Kraft bei der Verschiebung eines Teilchen entlang des geschlossenen Weges $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}: \quad \vec{r}(\varphi) = 2c\,\cos\varphi\,\vec{E}_x + 3c\,\sin\varphi\,\vec{E}_y\,, \quad (\varphi = 0\ldots 2\pi)\ ?$$

   (b) Unter welcher Bedingung für a und b besitzt die Kraft ein Potential?
   Berechnen Sie dann das zugehörige Potential $U(\vec{r})$.
   Prüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $\vec{F}(\vec{r})$ wieder aus $U(\vec{r})$ gewinnen.