Institut für
Theoretische Physik
PD Dr. G. Plunien

Theoretische Mechanik WS 04/05

7. Übung

1. Es sei $\vec{a}$ ein konstanter Vektor, $r = \sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}}$ und $f(r)$ eine beliebige, differenzierbare Funktion von r, berechnen Sie damit folgende Ausdrücke

$$\vec{\nabla}\times\vec{r}, \quad \vec{\nabla}\times[f(r)\vec{r}]\,, \quad \vec{\nabla}\times\left[\tfrac{1}{2}\vec{a}\times\vec{r}\right]\,, \quad \vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\cos(\vec{a}\cdot\vec{r})\right].$$

2. Die auf einen Massenpunkt wirkenden Kräfte $\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ mögen sich in konservative $\vec{F}_{\text{kons}}$ und nicht-konservative (dissipative) $\vec{F}_{\text{diss}}$ zerlegen lassen, wie lautet der zugehörige Energiesatz? Betrachten Sie nun speziell den Fall einer explizit zeitabhängigen Potentialkraft $\vec{F}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial V(\vec{r},t)}{\partial\vec{r}}$.

3. Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potential $V(x) = \dfrac{V_o}{\cosh^2(x/a)}$; ($a, V_0$ - const) .

   (a) Welche Bewegungstypen treten hierbei in Abhängigkeit von der Energie E und vom Vorzeichen von V_o auf? Wo befindet sich das Teilchen im Gleichgewicht?

   (b) Bestimmen Sie die Abhängigkeit der Periodendauer T von der Energie E für Schwingungen mit *beliebiger* Amplitude um die stabile Gleichgewichtslage.
   Hinweis: Anfangssubstitution $u = \sinh(x/a)$; $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z$.

   (c) Für den Fall des stabilen Gleichgewichts berechne man die Frequenz *kleiner* Schwingungen um die Ruhelage, indem man das Potential um die Gleichgewichtslage in eine Taylorreihe bis zum quadratischen Glied entwickelt und mit dem harmonischen Oszillator vergleicht.

4. (a) Betrachtet werde die Bewegung einer Masse m im Zentralpotential $U(r) = \alpha r^\beta$, für welche Potenz β ist dann der Runge-Lenz-Vektor

$$\vec{\Lambda} = \frac{\alpha}{|\alpha|}\left(\frac{\vec{p}\times\vec{L}}{m\alpha} + \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

   eine *Erhaltungsgrösse*?

   (b) Indem man $\vec{\Lambda}$ skalar mit $\vec{r}$ multipliziert ($\sphericalangle(\vec{\Lambda},\vec{r}) = \varphi$), bestimme man die Bahnkurve $r(\varphi)$.