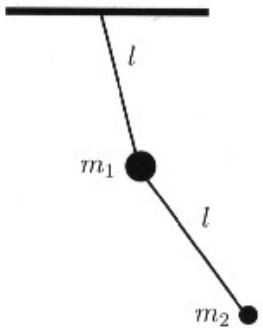
Institut für
Theoretische Physik
PD Dr. G. Plunien

Theoretische Mechanik WS 04/05

13. Übung

1. Stellen Sie die LAGRANGE-Funktion für das ebene Doppelpendel (siehe Skizze) auf. Führen Sie in der LAGRANGE-Funktion eine harmonische Näherung für kleine Auslenkungen aus der stabilen Gleichgewichtslage durch (TAYLOR-Entwicklung bis zu Termen quadratischer Ordnung). Wie lauten in dieser Näherung die LAGRANGE-Gleichungen des Systems? Finden Sie deren allgemeine Lösung und bestimmen Sie die Normalkoordinaten des Systems.



2. Ein Teilchen der Masse m bewege sich im homogenen Schwerefeld der Erde ($\vec{g} = -g\vec{E}_z$) nur auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R. Reibung werde vernachlässigt.

   (a) Wie lauten die HAMILTON-Funktion und die kanonischen Gleichungen unter Verwendung von Kugelkoordinaten? Welche Erhaltungssätze gelten?

   (b) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit sich das Teilchen auf einer *horizontalen* Kreisbahn bewegt?

   *(c) Wie gross ist die Frequenz *kleiner* Schwingungen um die Kreisbahn aus (b)?

3. Zeigen Sie die Invarianz der LAGRANGEschen-Bewegungsgleichungen unter folgender Transformation der LAGRANGE-Funktion (mechanische Eichtransformation)

$$L(q_1, .., q_f, \dot{q}_1, .., \dot{q}_f, t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{L}(q_1, .., q_f, \dot{q}_1, .., \dot{q}_f, t) = L + \frac{d}{dt}\Omega(q_1, .., q_f, t) \qquad (1)$$

   (mit einer beliebigen Funktion $\Omega = \Omega(q_1, .., q_f, t)$)

   (a) durch explizite Berechnung der LAGRANGE-Gleichungen für L und $\tilde{L}$,

   (b) mit Hilfe des HAMILTON-Prinzips der kleinsten Wirkung.

   (c) Betrachten Sie nun die Änderung der LAGRANGE-Funktion eines freien Teilchens unter GALILEI-Transformation und deren Konsequenz für die Bewegungsgleichung des Teilchens.